श्रीगणेशायनमः

रेखागणित

रेखागणित शिल्पविद्याकी अति उपयोगी है अर्थात् यं
त्र और कलोंकी रचनामें इसका बहुधा काम पड़ता है
और इसके पढ़ने से गणितकी उपपत्ति जानी जाती है इ
सी कारण सिद्धांतविद्यामें भी रेखागणितका बहुधा प्रयो
जन पड़ताहै इसमें कोने और रेखाका आलंब लेके गणितहोताहै
इसकारण उसे रेखागणित कहते हैं पाटी और बीजकी गणितमें
बहुत से अंक मिटेलने और बहुतसे बनाने पड़ते हैं तब गणितकाफल
सिद्ध होताहै परंतु यह ऐसी विद्याहै कि इसके पढ़ने
में मनुष्य अपनी बुद्धिसे समझकर गणितकी शुद्धता
वा अशुद्धता पुस्तक परही बना सक्ताहै और उसकी द
णित करने में मनुष्यको अधिक श्रम नहीं होताहै और
इस विद्या के बल से मनुष्य ऊंचाई निचाई और हर

और निजीकी का प्रमाण भी निःसंदेह बतासकाहै इस
लिये विद्यार्थियों को उचित हैकि मनलगाके श्रम से इ
स ग्रंथको पढ़कर मनुष्य देहका फल चतुराई और
जगत में यश पावें इस लिये लोगों का हित विचार अं
गरेजी से हिंदी भाषा में उलथा करके छपवाया है
इस विद्यामें जो रेखा कहनी होतीहै उसकी आदि
और अंतका अक्षर कहते हैं (अइ) रेखा कहने से
(अ) और (उ) के बीच वाली रेखा लेंगे जैसा अ——इ
जिस कोनेको कहना हो उसके ऊपर वाले अक्ष
र को बीचमें बोलेंगे जैसा (इ अ उ) कोन कहने
इ से (अ) बिंदुपरका समझते हैं
अ
उ जितने भुजका क्षेत्र कहना हो
ना है उसके कोन के अक्षर कहते हैं
जैसा (अ इ उ) त्रिभुज (अ इ उ क) चतुर्भुज परं





तु चतुर्भुज में साम्हने कोनेके दो अक्षर कहने

से भी चतुर्भुज समझते हैं जैसा ऊपर (अ इ उ क)
चतुर्भुज कहाहै उसे (अ उ) वा (इ क) चतुर्भुज
भी कहते हैं ऐसे और भी बहु भुज क्षेत्र जानो
इस ग्रंथके बीच व्यवहार में सर्वत्र सरल रेखा
और सरलकोन जानो
जिस साध्य में जिस २ परि भाषा वा पूर्व साध्यकी
अपेक्षा है वे पुस्तककी आयुधा में लिख दिये हैं परि
भाषा अबाध्य और स्वयं सिद्ध इनके आद्य अक्षर
लिखके उनके आगे उनकी संख्याके अंक करदिये हैं
और साध्यका सा लिखकर उसके आगे साध्यकी
संख्याका अंक लिखा है कल्पना करनेका (क) चि
न्ह बनाने का (ब) चिन्ह आयुध में लिखा है

रेखागणितकी उपयोगी
परि भाषा

१- बिंदु उसे कहते हैं जिसका स्थान नियतहो पर उसका परिमाण न हो और उसके विभाग भी न हो सके बिंदु एक ऐसा पदार्थ है जिसका स्थानतो नियतहैं पर उसमें लंबाई चौडाई और मुटाई कुछ नहींहोतीऔर ऐसे ⊙ चिन्ह को जो बिन्दु कहते हैं वह केवल उसका स्थान दिखाने के लिये हैं क्योंकि ऐसे चिन्ह काक्या ठीकहै इससे छोटे भी हो सके हैं ऐसा .... इसी रीतसे छोटे से छोटा बिंदुकरेंगे तो वही बात सिद्ध होगी कि जिसका स्थान नियत हो पर परिमाण नहो और जिसका परिमाण न होगा उसके विभाग भी न हो सकेंगे

२- रेखा वह है जिसमें लंबाई हो पर चौडाई नहो

२३-साध्य एक रेखा के किसी दिये हुए बिंदु पे ऐसा कोना बनाना चाहते हैं जो दिये हुए कोने के समान हो- कल्पना करो कि दी हुई अइ रेखा के अ चिन्ह पर ऐसा कोना बनाना चाहते हैं जो कउग दिये हुए कोन के समान हो- कउग कोन की उक रेखा के क चिन्ह से उग रेखा के ग चिन्ह तक रेखा करदो फिर अइ रेखा पर अचप ऐसा त्रिभुज बनाओ जिसके तीनों भुज उक, कग, गउ के समान हो अर्थात उक के समान अच, उग के समान अप, और कग, चप के समान होतो चअप कोन कउग कोन के समान होगा

उपपत्ति

कउग, और चअप, दोनों त्रिभुजों में कउ, और चअ, समान हैं उग, और अप, तुल्य हैं और कग, आधार चप, आधार के तुल्य है इस



लिये कउग, कोन चअप कोन के समान हुआ

२४ — साध्य — एक त्रिभुज के दो भुज दूसरे त्रिभु
ज के दो भुजों के समान हों पर एक त्रिभुज का उ
न भुजों के मध्य का कोन दूसरे त्रिभुज के उन भुजों
के मध्य कोन से बड़ा होवे तो पहले त्रिभुज का आ
धार दूसरे त्रिभुज के आधार से बड़ा होगा
कल्पना करो कि अइउ और कगच ये दो त्रिभुज
हैं उनकी अइ और कग भुजा समान हैं अउ और
कच तुल्य हैं परंतु इअउ कोन गकच कोन से ब
ड़ा है तो इउ आधार गच आधार से बड़ा होगा
कल्पना करो कि यहां कग भुजा कच भुजासे बड़ी
नहीं है — कग रेखा के क बिंदु पर से कप को
न ऐसा बनाओ जो इअउ कोन के तुल्य हो फिर सा २
कप को अउ अर्थात कच के तुल्य करलो गप सा २
और चप रेखा करदो — उपपत्ति
अइउ और कगप त्रिभुजों में अइ और कग भुजा
तुल्य हैं अउ और कप समान हैं इअउ कोन गकप
कोन के तुल्य है तो इउ आधार गप आधार के समान है इस आ

कप और कच समान हैं इस लिये कपच कोन
कचप कोन के तुल्य होगा परंतु कपच कोन ग
पच कोन से बड़ा है
इस कारण कचप को

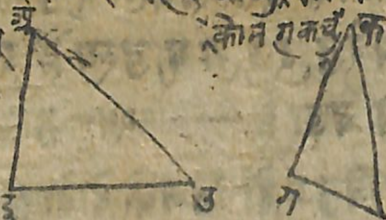


न भी गपच कोन से ब
ड़ा होगा तो गचप कोन गपच कोन से और भी
बड़ा होगा त्रिभुज में बड़े कोन के सन्मुख का भुज
बड़ा होता है इस लिये गप भुज गच भुज से ब
ड़ा है परंतु इउ गप तुल्य हैं इस कारण इउ भी
गच से बड़ा है — २५ — साध्य
ऐसे दो त्रिभुज हों जिनके दो दो भुज तुल्य हों और एक
त्रिभुज का आधार दूसरे त्रिभुज के आधार से बड़ा
हो तो बड़े आधार वाले त्रिभुज का शीर्ष कोन छोटे
आधार वाले त्रिभुज के शीर्षकोन से बड़ा होगा
कल्पना करो कि अइउ और कगच दो त्रिभुज हैं उन
में अइ भुज कग भुजा के तुल्य हैं और अउ भुजा क
च भुजा के तुल्य है परंतु इउ आधार गच आधार से

बड़ा है तो इ अ उ, कोन ग क च, कोन से बड़ा होगा
इ अ उ, कोन को क ग च, कोन से बड़ा होगा और
कहो कि बड़ा न होगा तो तुल्य होगा वा छोटा होगा

उपपत्ति

जो इ अ उ, कोन को ग क च, कोन के तुल्य मानो तो
इ उ, और ग च, आधार तुल्य होंगे परंतु उनकी
तुल्यता होनी असंभव है क्यों कि इ उ, को ग च, से
बड़ा मान चुके हैं इस लिये इ अ उ, कोन के तुल्य
नहीं है कदाचित
इ अ उ, कोन को
ग क च, कोन से



छोटा मानो तो इ उ, आधार ग च, आधार से छोटा
होगा पर यह बात भी नहीं बन सकी क्यों कि जिस
आधार को बड़ा माना था वह छोटा हुआ जाता है
इस लिये इ अ उ, कोन ग क च, कोन से छोटा भी न
हीं हो सकता जब कि इ अ उ, कोन क ग च, कोन से
छोटा नहीं है और वे तुल्य भी नहीं हैं तो इ अ उ,

कोन है और ल म न, क्षेत्र से बाहर ख, कोन है इस से जा
नो कि द ग न, चतुराई से बड़ा है और ल म न, चतुराई
से छोटा है

२०— जो क्षेत्र सूधी रेखाओं से घेरा हो उसे ऋजु भुज
कहते हैं
क ग ल द, क्षेत्र जो
सूधी रेखाओं से घे



रा है इस कारण यह ऋजु भुज क्षेत्र है परंतु ल म न र,
यह क्षेत्र टेढ़ी रेखाओं से घेरा है इस कारण ऋजु
भुज क्षेत्र न होगा

२१— त्रिभुज वा त्रिकोण वह क्षेत्र है जो तीन सूधी रे
खाओं से घेरा हो
से चार प्रकार के

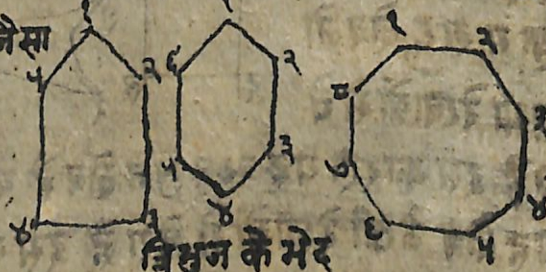


क्षेत्र जो तुम्हारे
देखने के लिये लिखे हैं वे त्रिभुज हैं

२२— जो क्षेत्र चार भुजाओं से घेरा हो उसे चतुर्भुज
क्षेत्र कहते हैं

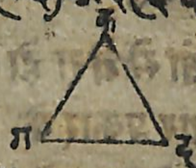
(क ग द त) और (ल म न र) ये दोनों क्षेत्र चतुर्भुज हैं

२१- जो क्षेत्र चार से अधिक भुजाओं से घेरा हो उसे बहुभुज क्षेत्र कहते हैं ये तीनों क्षेत्र जिन के पांच छे और आठ भुज हैं वे बहुभुज क्षेत्र हैं जैसा

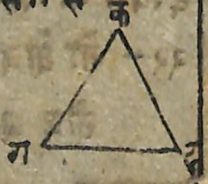


त्रिभुज के भेद

२४- सम त्रिभुज उसे कहते हैं जिसकी तीनों भुजा समान हों कल्पना करो कि (क ग द) त्रिभुज के (क ग) (ग द) और (द क) ये तीनों भुज समान हैं इस कारण (क ग द) यह त्रिकोण सम भुज होगा



२५- सम द्विबाहु त्रिभुज उसे कहते हैं जिसके दो भुज समान हों उसके तीसरे भुजको आधार कहते हैं कल्पना करो कि (क ग द) त्रिभुज के (क ग) और (क द) ये दोनों भुज समान हैं इस



कारण (क ग द) यह सम द्विबाहु त्रिभुज हुआ और (ग द) आधार भया

२६- विषम त्रिभुज वह है जिसकी तीनों भुजा समान हों जैसा (क ग द) त्रिभुज में (क ग) (द ग) और (द क) इन तीनों भुजका प्रमाण एकसा नहीं है इस लिये (क ग द) विषम त्रिभुज होगा



२७- समकोन त्रिभुज वा आत्य त्रिभुज उसे कहते हैं जिसमें एक कोना समकोन हो (क ग द) त्रिभुज में (क ग द) कोन समकोन है इस लिये यह त्रिभुज समकोन त्रिभुज होगा और इस त्रिभुज को आत्य भी कहेंगे



२८- अधिक कोन त्रिभुज वह है जिसमें एक अधिक कोन हो (क ग द) त्रिभुज में (क ग द) कोन अधिक कोन है इस लिये (क ग द) त्रिभुज अधिक कोन त्रिभुज होगा

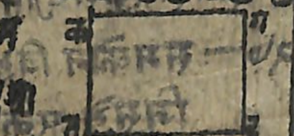


२९- न्यून कोन त्रिभुज वह है जिसमें सब कोन न्यून कोन हों

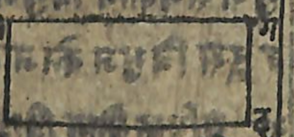


(क ग द) त्रिभुज में सब कोने न्यून
कोन हों तो (क ग द) यह त्रिभुज
न्यून कोन त्रिभुज होगा

२०— वर्गक्षेत्र उसे कहते हैं जिस चतुर्भुज के चारों भुज
आपस में समान हों और सब कोने भी समकोन हों
(क ग द त) यह चतुर्भुज है उसके (क ग, ग द, द त, त क)
ये चारों भुज तुल्य हैं और कोने भी सम
कोन हैं तो (क ग द त) चतुर्भुज वर्गक्षेत्र होगा



२१— आयत वा समकोन आयत क्षेत्र वह है जिसकी
आमने सामने की भुजा समान हों और कोने भी
समकोन हों पर सब भुजा समान न हों



(क ग द त) इस चतुर्भुज में जो कि (क ग) और (त द) भुजा समान हैं
और (क त) भुजा (ग द) भुजा समान है परंतु (क ग) और
(द त) भुजा बड़ी हैं और (क त) और (ग द) छोटी हैं और
कोने सब सम कोन हैं तो (क ग द त) यह आयत क्षेत्र होगा
२२— विषम कोण समचतुर्भुज वह क्षेत्र है जिसकी

का (इ न) आधार (अ उ च) त्रिभुज के (उ च) आधार के तु
ल्य हुआ (अ इ न) कोन (अ च उ) कोन के समान हुआ सा४
और (अ न इ) कोन (अ च उ) कोन के समान हुआ फिर सा४
आधार के नीचे देखो (इ न उ) और (उ च इ) जो दो त्रिभुज
हैं उनकी (इ न) और (उ च) भुजा तुल्य हैं क्यों कि उनकी क.
तुल्यता अभी सिद्ध कर चुके हैं (उ न) और (इ च) भुजा
क. तुल्य हैं (इ न उ) और (उ च इ) कोने तुल्य हैं तो (इ उ न) औ
र (उ इ च) कोने समान होंगे और (उ इ न) कोन के तुल्य
(इ उ च) कोन होगा इस प्रकार आधार के नीचे के (इ उ न)
और (उ इ च) कोने तो समान हुए (अ इ न) और (अ उ च)
कोनों को पहले तुल्य साध चुके हैं और (उ इ न) और (इ उ च)
कोनों को भी तुल्य कर चुके हैं फिर (अ इ न) और (अ उ च)
तुल्य कोनों में से (उ इ न) और (इ उ च) तुल्य कोन घटा
दिया तो शेष (अ इ उ) और (अ उ इ) कोने तुल्य बचे सा२
और वे दोनों कोने (इ उ) आधार पै के हैं

अनुमान

इससे यह बात भी सिद्ध होती है कि सम त्रिभुज के

सब कोने आपसमें तुल्य होते हैं

६ साध्य

जिस त्रिभुज में दो कोने समान होंगे उसके तुल्य कोनों के साम्हने की भुजा भी आपसमें तुल्य होंगी अइउ, त्रिभुज में अइउ, और अउइ, कोन आपस में तुल्य हैं तो अउ, और अइ, भुजाभी तुल्य होंगी

उपपत्ति



जब अइउ, और अउइ, कोने तुल्य हैं तो अउ, और अइ, भुजा अवश्य तुल्य होंगी कदाचित् कोई कहे कि तुल्य न होंगी तो उन में से एक बडी भुजा होगी ... कल्पना की कि अइ, भुजा से अउ, भुजा बडी है तो उसमें से



सा २ इअ, के तुल्य उक, काट लो और
अ १ इक, रेखा करदो इसरीतसे
अइउ, और कइउ, दो त्रिभुज हुए उनकी अइ, और कउ, भुजा तुल्य हैं इउ, भुजा

क

उभय निष्ठ है और उन तुल्य भुजाओं के मध्यगत अइउ, और कउइ, कोन तुल्य हैं इस कारण अउ, और
सा ४ कइ, आधार तुल्य होंगे अर्थात अइउ, और कइउ,
सा ४ दोनों त्रिभुज तुल्य होंगे परंतु यह बात असंभव है क्यों कि अइउ, बडे त्रिभुज के अंतर्गत जो कइउ, छोटा त्रिभुज है वह संपूर्ण बडे त्रिभुज के तुल्य हुआ जाता है

फल

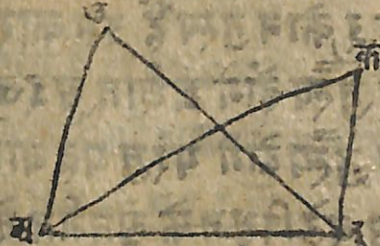
इससे यह बात भी सिद्ध होती है कि जिस त्रिभुज के तीनों कोने तुल्य होंगे उसकी तीनों भुजा भी तुल्य होंगी अर्थात् वह सम त्रिभुज होगा

७ साध्य

एक आधार पै एकही ओर ऐसे दो त्रिभुज नहीं बन सके जिनके वे भुज तुल्य हों जो आधार के एक छोर पै मिलें हों और आधार के दूसरे छोर पर मिलें वे भी तुल्य हों

अइ, आधार पै एकही ओर अइउ, और अइक ऐसे दो त्रिभुज नहीं बन सके जिनकी उअ, और

क ख, भुजा तुल्य हों और उ इ, और क इ, भुजा भी तुल्य हों



उपपत्ति

कभी कोई कहे कि तुल्य होंगे तो यह जानो कि उन दोनों त्रिभुजों की स्थिति तीन प्रकार से होगी प्रथम स्थिति यह है कि एक त्रिभुज का श्रीर्ष कोन दूसरे त्रिभुज से बाहर होगा जैसी संख्या ऊपर लिखी है उ, से क, तक रेखा करदो



उपपत्ति

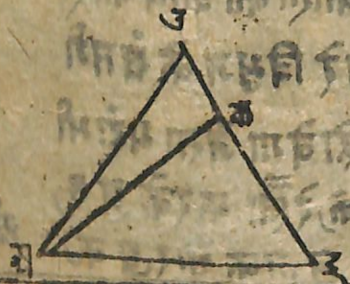
अ ख, और क ख रेखाओं की तुल्यता के कारण

अ उ क, और अ क उ, दोनों कोने तुल्य होंगे परंतु अ उ क, कोन इ उ क, कोन से बडा है तो अ क उ, कोन भी इ उ क, कोने से बडा होगा इस लिये इ क उ, कोन जिसका अ क उ, कोन एक खंड है वह अवश्य इ उ क, कोन से अधिक बडा होगा परंतु उ इ, और क इ, भुजा तुल्य हैं इस लिये इ क उ, और इ उ क, दोनों कोन तुल्य होंगे परंतु वह सिद्ध हो चुका है कि इ क उ, कोन इ उ क, कोन से बडा है इस लिये इ क उ, कोन इ उ क, कोन तुल्य है और उससे बडा भी है और यह असंभव है इस लिये दोनों त्रिभुजों की प्रत्येक दो दो भुज जो आधार के छोर पर मिलती हैं वे तुल्य न होंगी दूसरे प्रकार में कल्पना करो कि एक त्रिकोण का शीर्ष कोण दूसरे त्रिभुज के अंतर्गत होवेगा जैसा यहां भी उ क, रेखा करके अ उ, को च, तक और अ क,



को ग, तक बढा दो अ उ, और अ क, भुजा की तुल्य
ता के कारण उ क, आधार के नीचले च उ क, ग
सा ५ क उ, कोने तुल्य होंगे परंतु च उ क, कोण इ उ क,
कोण से बडा है तो ग क उ, कोण भी इ उ क, कोण
से बडा होगा इस लिये इ क उ, कोण जिसका ग
क उ, कोन एक खंड है वह अवश्य इ उ क, कोनसे
अधिक बडा होगा इ उ, और इ क, भुजों की समा-
ता से उ क, आधार पै के उ क इ, और क उ इ, तुल्य
होंगे और यह सिद्ध हो चुका है कि इ क उ, कोन
इ उ क, कोन से बडा है इस लिये इ क उ, कोन
इ उ क, कोन के तुल्य है और उस से बडा भी है प
स्वयं रंतु यह असंभव है

तीसरे प्रकार में कल्पना करो कि क शीर्ष कोण
अ इ उ, त्रिभुज की इ उ,
भुजा पर रहेगा जैसे पे
सी कल्पना करने में सं
पूर्ण इ उ, भुजा के तु



ल्य इ क, भुजा होगी यह भी असंभव है क्यों कि
संपूर्ण पदार्थ अपने एक खंड के तुल्य हुआ
जाता है

८ साध्य

एक त्रिभुज की दो भुजा दूसरे त्रिभुज की दो भु
जाओं के तुल्य हों और उनके आधार भी तुल्य हों
तो उन दोनों त्रिभुजों के शीर्ष कोण समान होंगे
कल्पना करो कि अ इ उ, त्रिभुज की अ इ, और अ उ,
भुजा क ग च, त्रिभुज की क ग, और क च, भु
जाओं के तुल्य हैं इ उ, और ग च, आधार तुल्य
हैं तो उनके इ अ उ, और ग क च, शीर्ष कोण
समान होंगे



उपपत्ति

अ इ उ, त्रिभुज को क ग च, त्रिभुज पै एसी रीति
से रक्खो कि इ, चिन्ह ग, चिन्ह पर हो और इ उ,

मरल आधार ग च, सरल आधार पर रहै तो उ, चिन्ह अवश्य च, चिन्ह पर गिरेगा क्यों कि इ उ, और ग च, समान है ऐसेही स्थापन करने से अ इ, भुजा क ग, भुजा पर और अ उ, भुजा क च, भुजा पर स्थिर होगी — कदाचित ऐसा मानो कि इ उ, आधार तो ग च, आधार पै रहेगा परंतु इ अ, और उ अ, भुजा ग क, और च क, पर न रहेंगे तो कल्पना करो कि ग त, और च त, की न्याई रहेंगी

ग त, और च त, ये दोनों भुजा इ अ, और उ अ, भुज के तुल्य हैं परंतु ग क, और च क भुजा भी इ अ, और उ अ, के समान हैं इस कारण ग क, और च क, दोनों भुजा ग त, और च त, के समान होंगी· इससे यह बात हुई कि एक आधार पै एकही ओर दो ऐसे त्रिभुज न बनें जिनकी वे भुजा तुल्य हैं जो आधार के एक ओर पै मिली हैं

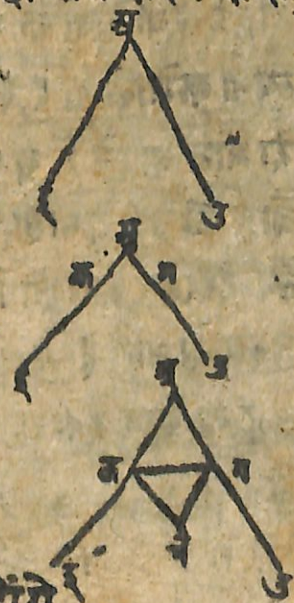


पर यह असंभव है इसी यही बात सिद्ध होती है जो इ उ, आधार ग च, आधार पै रहेगा तो इ अ, और उ अ, भुजा ग क, और च क, भुजाओं पै अवश्य रहेंगी इसी कारण अ इ उ, त्रिभुज का अ, शीर्ष कोन क ग च, त्रिभुज के क, शीर्ष कोन पर रहेगा इस हेतु से वे दोनों शीर्ष कोन तुल्य होंगे

९ साध्य

दिये हुए सरल कोन के समान दो भाग करने की रीति

कल्पना करो कि इ अ उ, सरल कोनके तुल्य दो भाग करने की इच्छा है अ इ, रेखा में कहीं क, चिन्ह कर दिया और अ उ, में से अ क, के तुल्य अ ग, काट लिया क ग, रेखा कर उसपै क ग च, सम त्रिभुज बनाया अ च सूधी रेखा करने से इ अ उ, सरल कोन के तुल्य दो खंड होंगे



उपपत्ति



क अ च, और ग अ च, दो त्रि
भुजों में अ क, और अ ग, तुल्य
हैं क च और ग च तुल्य हैं और
अ च, भुजा उभय निष्ठ है इस कारण क अ च, कोन ग
सा ८ अ च कोन के समान होगा अर्थात् इ अ उ कोन के
तुल्य दो खंड होंगे

१० साध्य

दी हुई सूधी रेखा के तुल्य दो भाग करने की रीति— क
ल्पना करो कि अ इ, दी हुई सूधी रेखा है उसके समान
दो भाग करने हैं अ इ, सूधी रेखा पै अ इ उ सम त्रि
सा १ बाहु त्रिभुज बनाओ अ उ इ, कोन के उ क, रेखा से तु
सा ९ ल्य दो खंड करलो तो क चिन्ह पर अ इ, रेखा के
तुल्य दो भाग होंगे

उपपत्ति



अ उ क और इ उ क, इन दो त्रिभु
...

लिये अ क, और इ क, आधार भी तुल्य होंगे अर्थात् अ
इ, रेखा के क चिन्ह पै तुल्य दो खंड होंगे

११ साध्य

दी हुई रेखा के नियत चिन्ह पै से लंब करने का य
त्न अ इ, दी हुई सूधी रेखा में (उ) चिन्ह दिया हुआ है व
हां से लंब निकालना है अर्थात् ऐसी सूधी रेखा खड़ी
करनी है कि उस खड़ी रेखा और दी हुई रेखा से जो दो
कोन उत्पन्न हों वे समकोन हों
अ इ, रेखा में कहीं क, चिन्ह कल्पना करलो और
उ इ, में से उ क, के तुल्य उ ग, अलग करलो फिर ३ सा
क ग, पर क ग च, सम त्रिबाहु त्रिभुज बनाओ और १ सा
उ, से च, तक रेखा करदो तो अ इ, रेखा के उ, चि
न्ह पर उ च, रेखा लंब होगी

उपपत्ति

क उ च, और ग उ च, इन दो त्रिभुजों में क च, और
... भुजा उभय निष्ठ है फिर

सा० और ग उ च, ये दोनों कोने तुल्य होंगे
परंतु ये आसन्न कोन हैं इस लिये
इन में से प्रत्येक कोना



सम कोन होगा इसी कारण अ इ, रेखा के उ, चिन्ह
पै उ च, रेखा लंब हुई

अनुमान

इस्से यह भी जाना जाता है एक सूधी रेखा पै दूसरी रेखा मिला कर रक्खी जाय तो ऐसा न होगा कि उनका एक देश मिल जाय और एक देश न मिले कदाचित् कोई कहे कि दो सूधी रेखाओंका योग संपूर्ण न होगा जैसा अ उ, और अ क, दो सूधी रेखा हैं उन्हें मिला कर रक्खा तो अ इ, तक दोनों रेखाओं का मिला कर एक रूप हो आयगा पर उनके इ उ, और इ क, भाग मिलेंगे

उपपत्ति

स्वयंसिद्ध परिभाषा

वे बातें ऐसी हैं कि उन्हें सब जाने हैं उन में कोई शंका नहीं करता

१– जितने पदार्थ किसी एक पदार्थ के तुल्य होंगे
वे सब आपसमें तुल्य होंगे जैसा (क) और (ग)
समान हैं फिर ——क—— ——ग——
(ग) और (द) भी समान हैं ——द——
तो (क) और (द) भी समान होंगे

२– तुल्य पदार्थों में तुल्य २ जोड़ा जाय तो वे योग
फलभी समान होंगे
जैसा (क) और (ग) समान हैं और (द) और (त) समान हैं
तो क और द का योग ——क—— ——ग——
——द—— ——त——
फल होगा अर्थात् क– क——द ग——त
द–ग–और त के योग फल ग त के समान होगा

३– तुल्य पदार्थों में से तुल्य २ ही घटा दिया जाय तो शेष

जैसा क और ग तुल्य
क ग
हैं और द और न तुल्य
द न
हैं फिर क में से द और
क द ग न
र ग से न घटा दिया तो शेष क द और ग न तुल्य बचें
गे.

४— अतुल्य पदार्थों में जो तुल्य २ जोड़ा जाय तो
वे फल भी अतुल्य होंगे

जैसा (क) और (ग) तुल्य हैं और (द) और (न) तुल्य हैं तो (क)
और (द) का योग फल (क-द)
क ग
फिर (ग) और (न) के योग फल
द द
(ग-न) ये तुल्य न होंगे
क द ग न

५—अतुल्य पदार्थों में से तुल्य घटाने से शेष अतुल्य रहते हैं

जैसा (क) और (ग) अतुल्य हैं फिर (द) और (न) तुल्य हैं क
में से (द) को घटा दिया और (ग) में से (न) को घटा दिया
तो शेष (क द) और
क
द
न
न
(ग न) तुल्य बचे
क द ग न

६— जितने पदार्थ किसी एक पदार्थ से दूने
होंगे वे आपस में तुल्य होंगे

जैसा (द) से (क) और
क ग
(ग) प्रत्येक दूना है
द
तो (क) और (ग) आपस में तुल्य होंगे

७— जितने पदार्थ किसी एक पदार्थ के आधे के
तुल्य होंगे वे भी आपस में तुल्य होंगे

और (क) यह (द) का आधा है और (ग) भी (द) का आ
धा है तो (क) और
क ग
(ग) समान होंगे
द

८— जो पदार्थ आपस में एक दूसरे को ढक लेता
है वे तुल्य होते हैं

जैसा (क ग च ज) एक चौकोना चौखटा है और (त प द
न) दूसरा चौखटा है पहिले (क ग च ज) चौखटे को
दूसरे (त प द न) चौखटे पर रक्खो तो ऊपर वाला
चौखटा नीचे वाले सब चौखटे को ढक ले। फिर दूस
रे को पहले चौखटे
पर रखने से पहिला
चौखटा दूसरे से सब

क ग त प
ज च न द

ढक जाय तो जानो कि उन दोनों (क ग न म) और (न य द न) चौखटों के तल आपस में तुल्य हैं

९— संपूर्ण पदार्थ अपने प्रत्येक खंड से बड़ा होता है (अ इ) रेखा के (क) चिन्ह पै खंड होते हैं तो उन (अ क) और (इ क) प्रत्येक खंड से (अ इ) रेखा का संपूर्ण प्रमाण बड़ा है

१०— दो सूधी रेखाओं से क्षेत्र नहीं बंध सक्ता देखो जैसा कि (द) और (न) दो सूधी रेखा हैं

यद्यपि दो सूधी रेखाओं का एक एक ओर मिल भी सक्ता है जैसा क और ग रेखा न चिन्ह पर मिलती हैं परंतु कोने के सामने की दिशा भिन्न रहती है इस कारण दो सूधी रेखाओं से क्षेत्र नहीं होता परंतु जो रेखा सूधी न हो अर्थात् टेढी हो तो दो वा एक रेखा से भी क्षेत्र बन सक्ता है जैसा







११— सब समकोन आपस में समान होते हैं

समकोन एक परिमाण है उससे अधिक होगा सो अधिक कोन हो जायगा और छोटा होगा सो न्यून कोन कहावेगा अधिक कोन वा न्यून कोन को समकोन न कहेंगे जो सम कोन होगा वही सम कोन कहावेगा इस लिये जितने सम कोन होंगे वे सब तुल्य होंगे

जैसे (मन) से न्यून वा अधिक होगा वह (मन) न कहावेगा जो पूरा मन होगा उसे ही मन कहेंगे और जितने पदार्थ मन २ भर के होंगे वे सब तुल्य होंगे

१२— जो एक सरल रेखा सूधी दो रेखाओं से योग करे उसके एकही ओर जो दो कोन उत्पन्न होवें दो सम कोन से न्यून हों तो वे दोनों रेखा उधर बढाने से मिल जायगी जिधर के दो कोनों का योग दो समकोन से न्यून होगा

जैसा (अ इ) और (उ क) ये दो सूधी रेखा हैं उन पर ती
सरी रेखा (ग च) का योग हुआ और कल्पना करो कि
(इ ग च) और (क च ग) को



नों का योग दो समकोन
से न्यून है जो (इ) और (क) ओर की और वे रेखा अ
पनी सूध में बढ़ाई जायगी तो (ल) चिन्ह पे अव-
श्य मिलेंगी

प्रथम अध्याय

इस अध्याय में अड़तालीस साध्य हैं

१ साध्य

दिई हुई रेखा पर एक सम त्रिबाहु त्रिभुज ब-
नाया चाहते हैं
(अ इ) दी हुई सूधी रेखा है

अ ———————— इ

इस पर सम त्रिबाहु त्रिभुज के बनाने की इच्छा है
तो (अ इ) रेखा के (अ) चिन्ह
को केंद्र मान (अ इ) त्रिज्या से
अ इ ... से (इ उ क) वृत्त बनाया

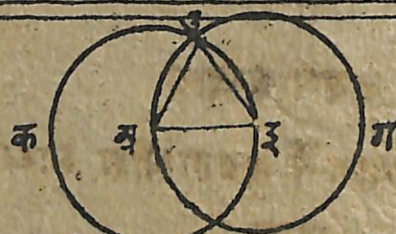


और उसी (अ इ) रेखा के (इ) चिन्ह को केंद्र मान (अ इ)
त्रिज्या से (अ उ ग)
अ इ ...



... दोनों वृत्तों के जो दो खंड के चिन्ह हैं
... से (इ) चिन्ह है फिर (अ उ) और (इ उ) सूधी

अ १ रेखा करदो



अ इ उ, यह सम त्रिबाहु त्रिभुज हुआ

उपपत्ति

अ इ, और अ उ, रेखा तुल्य है क्यों कि ये दोनों रेखा इ उ क, वृत्त के व्यासार्द्ध है ऐसेही उ अ, और इ उ, रेखा तुल्य हैं कारण यह है कि वे दोनों रेखा अ उ ग, वृत्त की त्रिज्या हैं अ इ, रेखा प्रत्येक अ उ, और इ उ, रेखा के तुल्य है इस कारण अ उ, और इ उ, रेखा तुल्य होंगी तो अ इ उ, त्रिभुज की अ इ, अ उ, और इ उ, भुजा आपस में तुल्य हैं इस कारण अ इ उ, त्रिभुज सम त्रिबाहु त्रिभुज हुआ

२ साध्य

दिये हुए बिंदु से एक ऐसी सूधी रेखा किया चाहते हैं जो दी हुई सूधी रेखा के समान हो अ, बिंदु और इ उ, सूधी रेखा दी हुई हैं और अ, चिन्ह से इ उ, रेखा

अ इ उ, सूधी रेखा के इ, चिन्ह पै इ ग, लंब करनेसे अ इ ग, और उ इ ग, कोने सम कोन होंगे फिर कहने हैं कि अ इ क, यह भी सूधी रेखा है तो अ इ ग, ये कोनेभी समकोन होंगे तो ग इ क, और ग इ उ, दोनों कोने सम कोन हुए इस कारण से ग इ क, और

स ११ ग इ उ, कोने तुल्य होंगे

परंतु यह असंभव है



क्योंकि राशिका एक खंड संपूर्ण राशि के तुल्य होता है

१२ - साध्य

अपरिमित रेखा से बाहर एक ओर जो इष्ट बिंदु है वहां से उस अपरिमित रेखा पर लंब डालने की रीत कल्पना करो कि अ इ, अपरिमित रेखा है और रेखा से अलग एक ओर उ, चिन्ह दिया है वहां से अ इ, रेखा पर लंब डाला चाहते हैं

रेखा से नियर उ, चिन्ह हो उससे दूसरी ओर क, चिन्ह कल्पना करो फिर उ क, त्रिज्या से क ग च, वृत्त ब

सा २ जैसे उस तल से जहां अइ, रेखा कटे वहां ग, और
घ, चिन्ह लगाओ फिर गघ, के तुल्य दो खंड उप, चिन्ह
पै करो और उ, से प, तक रेखा करदो तो वही उप,
रेखा अइ, रेखा पै लंब होगी उ, चिन्ह से ग, और
घ, तक रेखा करदो उपपत्ति

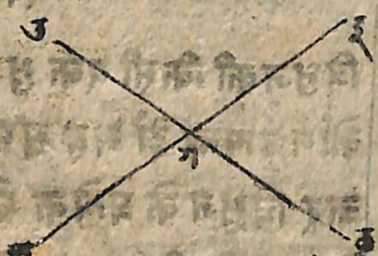


गपउ, और घपउ, दो त्रिभु
जों में गप, और घप, तुल्य आ
धार हैं क्योंकि प्रत्येक आधार
गप, का आधार है घप, और
उग, उघ, तुल्य हैं उप, उभय निष्ठ है इस लिये गपउ,
सा ८ और घपउ, आसन्न कोण तुल्य होंगे इसी कारण
प १० उप, रेखा अइ, रेखा पै लंब होगी

१२ साध्य

एक सूधी रेखा पै दूसरी सूधी रेखाका योग होने से
जो दो कोने उत्पन्न हों उनमें से प्रत्येक कोण समको
ण होगा वा उन दोनों कोणोंका योग दो समकोणों के
समान होगा कल्पना करोकि अइ, सूधी रेखा को उक,

सूधी रेखाओं के योग से
अगक, और उगक, ये
दो कोने उत्पन्न होते हैं
उनका योग भी दो सम



सा १२ कोन के तुल्य है इस कारण उगअ, और अगक, दो
कोनों का योग अगक, और कगइ, दो कोनों के यो
ग के तुल्य है — उन दोनों योगों में से अगक, उ
भयनिष्ठ कोन हटा दिया तो शेष उगअ, और इगक,
सन्मुख कोन समान बचे ऐसे ही उगइ, और अगक,
सन्मुख कोनों की समानता जानो

पक्ष १ ——— इससे यह बात सिद्ध होती है
कि दो सूधी रेखाओं के आपसमें काटने से जो एक
चिन्ह पर चार कोने उत्पन्न हों उन चारों कोनों का
योग चार समकोन के तुल्य होगा

टिफल २ ——— एक बिंदु पै कई एक
रेखाओं से जितने कोने उत्पन्न होंगे उन सबों
का योग चार समकोन के तुल्य होगा

१९—साध्य

त्रिभुज की किसी एक भुजा के बढ़ाने से जो बहिः कोन उत्पन्न हों वह अपने आसन्न कोन को छोड़ कर त्रिभुज के प्रत्येक अंतः कोने से बड़ा होगा कल्पना करो कि अ इ उ, त्रिभुज है उसकी इ उ, भुजा को क, चिन्ह तक बढ़ाने से जो अ उ क, बहिः कोन उत्पन्न होगा वह उ इ अ, और इ अ उ, प्रत्येक अंतः कोण से बड़ा होगा— अ उ, भुजा के ग, चिन्ह पर तुल्य दो भाग करलो फिर इ ग, रेखा कर उसे ग, की ओर अपनी सूध में बढ़ादो और उस में से इ ग, के तुल्य ग च, काटलो फिर च उ, रेखा करदो

उपपत्ति— अ ग इ, और उ ग च, त्रिभुजों में अ ग, और उ ग, भुजा तुल्य हैं फिर इ ग, और ग च, तुल्य है और अ ग इ, कोन उ ग च, कोन के तुल्य है इस लिये अ इ, और उ च, आधार समान होंगे और आधारों पे के कोने भी समान होंगे इस कारण इ अ ग, और ग उ च, कोने तुल्य हुए तो अ इ उ, कोन अ उ क

सूधी रेखा पर ऐसे ढब से खड़ा किया जिस से क इ अ, और उ इ अ, कोने हों तो उन कोनों में से प्रत्येक सम कोन होगा या उन दोनों कोनों का योग दो सम कोन के समान होगा

उपपत्ति

जो कि क इ, रेखा पर अ इ रेखा के योग करने से क इ अ, और उ इ अ, कोने तुल्य हों तो उन दोनों आसन्न कोनों में से प्रत्येक कोना सम कोन होगा अर्थात क इ अ, और उ इ अ, कोने तुल्य होंगे तो उन दोनों आसन्न कोनों में से प्रत्येक कोना सम कोन होगा अर्थात क इ अ, और उ इ अ, ये दोनों कोने सम कोन होंगे कल्पित क इ अ, और उ इ अ, कोने न होंगे तो क उ, रेखा पर इ ग, लंब करो उससे क इ ग, और उ इ ग, कोने



सम कोण होंगे फिर उ इ अ, और अ इ ग, कोने मिल कर उ इ ग, समकोन के तुल्य हैं और उ इ ग, कोन में क इ ग, सम कोन मिलाओ तो उ इ अ, अ इ ग, ग इ क

इन तीनों कोनों का योग दो सम कोन के तुल्य होगा
फिर कइग, और गइअ, इन दोनों कोनों के योग
कइअ, कोन में अइउ, कोन मिलाने से योग दो स
म कोन के तुल्य होगा अर्थात् कइअ, और अइउ,
दो कोनों का योग दो सम कोन के तुल्य हुआ

१४—साध्य

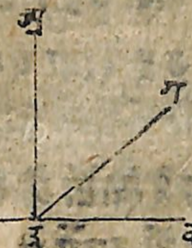
दो ओर से दो सूधी रेखा आवें और उनका एक
१क छोर तीसरी रेखा के छोर पै मिले और वहां जो दो
कोने उत्पन्न हों उनमें से प्रत्येक कोना सम कोन
हो वा उन दोनों कोनों का योग दो सम कोन के तु
ल्य हो तो उन तीनों रेखाओं में से दो रेखा मिल
कर एक सूधी रेखा हो जावेगी

कल्पना करो कि उइ, और कइ, दो सूधी रेखा हैं और
अइ, तीसरी सूधी रेखा है इन तीनों रेखाओं का योग इ,
बिन्दु पर हुआ और उनके योग से उइअ, और कइअ,
जो दो कोने उत्पन्न हों उनमें से प्रत्येक कोना सम कोन
हो वा उन दोनों कोनों का योग दो सम कोन के तुल्य

हो तो उइ, और कइ, रेखा मिल कर एक सूधी रे
खा हो जाइगी

उपपत्ति

कदाचित् उइ, और कइ,
रेखा एक सूथ में न
होंगी तो कल्पना करो
कि उइ, और गइ रेखा



एक सूथ में होंगी उनका अइ, रेखा के साथ यो
ग होने से जो अइउ, और अइग, कोने उत्पन्न होते हैं
सा०१३ वे दो सम कोन के समान होंगे और उइअ, और क
इअ, कोनों का योग भी दो सम कोनों के तुल्य हैं इस क
लिये उइअ, और कइअ, इन दो कोनों का योग भी दो
सम कोन के समान है उन दोनों योग में से उइअ उ
भय निष्ट कोन घटा देने से शेष कइअ, और गइअ,
स्व०२ कोन तुल्य बचेंगे परंतु यह बात असंभव है क्योंकि
संपूर्ण पदार्थ अपने एक खंड के तुल्य हुआ जाता है इ
स लिये उइ, और इग, रेखा एक सूथ में न होंगी अर्था
त् उइ और इक, मिल कर एक सूधी रेखा होगी

...भी जानना चाहिये कि (इ क) रेखा को छोड़ और को-
ई रेखा (उ इ) रेखा की सूध में न होगी इस कारण औ-
र (उ इ) रेखा एक सूध में न होगी

१५—साध्य

दो रेखाओं के आपस में कटने से जो चार कोने उत्प-
न्न हों उनमें से एकांतर कोने अर्थात् सन्मुख के दो
दो कोन आपस में तुल्य होंगे (अ इ) और (उ क) दो सूधी
रेखा हैं वे आपस में (ग) बिन्दु पर कटती हैं तो (उ ग
अ) और (इ ग क) ऐसे सन्मुख कोन समान होंगे ऐ-
से ही (अ ग क) और (उ ग इ) सन्मुख कोन समान हों-
गे

उपपत्ति

(अ ग) और (उ क) दो सूधी रेखाओं के योग से जो (अ ग
उ) और (अ ग क) दो कोन उत्पन्न होते हैं इन दो कोनों
का योग दो सम कोनों के तुल्य होता है (क अ) और (उ इ)
दो सूधी रेखाओं के योग से (अ ग क) और (इ ग क)
ये दो कोने उत्पन्न होते हैं इन दो कोनों का योग
दो सम कोनों के तुल्य होता है (क ग) और (अ इ) से

सब भुजायें आपस में समान हों पर उस के कोने
सम कोन न हों

जैसा (क ग द त) यह चतुर्भुज क्षेत्र है उसकी चारें
भुजा आपस में समान हैं परंतु सब कोने सम को-
न अर्थात् तुल्य नहीं है जैसा कि
(ग द त) कोन (त क) कोने
से बड़ा है इस हेतु से यह विषम
कोण सम चतुर्भुज क्षेत्र हुआ



२२—भुजात्यायत वा विषम कोण आयत वह है जिसमें
आमने सामने की भुजा तुल्य हों परंतु सब भुजा आ-
पस में तुल्य न हों और उसका कोई कोन भी समकोन न हो
कल्पना करो कि (क ग द त) चतुर्भुज में (क ग) और (द त)
सामने की भुजा समान हैं और (क त) और (ग द) भुजा
समान है परंतु (क त) और
(ग द) ये दोनों भुजा (क ग) और
(त द) से बड़ी हैं और सब
कोने सम कोन अर्थात् तुल्य नहीं है



२४— ऐसे कोइ कर और चतुर्भुज विषम चतुर्भुज कहाते हैं— जैसे चतुर्भुज पहिले कह आये हैं उन में सब चतुर्भुजों का स्वरूप भिन्न है अर्थात् इन की प्रत्येक सन्मुख की दो भुजा तुल्य नहीं हैं इस कारण ये विषम चतुर्भुज कहाते हैं

२५— समानांतर रेखा वे कहाती हैं जो एक धरातल में हों और उन्हें दोनों ओर चाहे जितनी बढ़ाओ पर वे मिलें नहीं समानांतर रेखाओं के बीच में सदा समान अंतर रहेगा जैसा कि (क ग) और (ल म) रेखाओं के बीच में समान तुल्य अंतर है वे करोड़ों कोस तक भी बढ़ाई जायगी तो भी वे नहीं मिल सकेंगी और उनका अंतर कुछ भी न्यून या अधिक न होगा परंतु जो (अ आ) और (ओ औ) रेखा समानांतर नहीं हैं और जिधर उनका थोड़ा अंतर है उधर की ओर बढ़ाने से (न) चिन्ह पर मिल जायेंगी

क —— ग
ल —— म

अबाध्योपक्रम

अबाध्य उसे कहते हैं जिसे सब लोग विन तर्क किये अंगीकार करते हैं और इस लिये इन क्रियाओं को जो नीचे लिखी हैं विना सिद्ध करे मान ली हैं

१— हमें यह सामर्थ्य है कि एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक सूधी रेखा खींच सके हैं

कल्पना करो कि (क) और (ग) दो बिंदु हैं उन के बीच में सूधी रेखा कर लेने में कुछ अटकाव नहीं है चौथी परिभाषा देखो

२— परिमित रेखा को उसी सूध में मन मानी बढ़ा सके हैं

देखो (क ग) परिमित सूधी रेखा है उसके ओर (क) और (ग) हैं

२ क ग

उस रेखा को और अपनी इच्छा में (द त) तक बढ़ा देने का भी हम को अधिकार है

३– दिये हुये बिंदु को केंद्र मानके चाहें जितनी बड़ी त्रिज्या से वृत्त बना सके हैं

कल्पना करो कि (क) बिंदु है उसे केंद्र मान मन मानी त्रिज्या से छोटा बड़ा वृत्त बना सके हैं जैसा (क) केंद्र



दिया है उससे (क ग) त्रिज्या से छोटा वृत्त और (क म) त्रिज्या से बिचला वृत्त और (क न) त्रिज्या से बड़ा वृत्त बना सके हैं ऐसे और भी जानो

कोन क ग च, कोन से बड़ा होगा–

२६– साध्य– जो त्रिभुजों के दो दो कोने समान हों और उन का एक एक भुज भी समान हो तो उन त्रिभुजों के बाकी दो दो भुज और तीसरा कोन तुल्य होंगे पर वे तुल्य भुज एक दिशा के हों अर्थात तुल्य कोनों के सामने वाले हों वा तुल्य दोनों कोनों को स्पर्श करने वाले हों– कल्पना करो कि अ द उ, और क ग च, कोन दो त्रिभुज हैं उनके अ द उ और क ग च, कोन तुल्य हैं अ उ द, और क च ग, कोन तुल्य हैं और उन त्रिभुजों में दिये हुए दोनों कोनों को स्पर्श करने वाली द उ, और ग च, भुजा तुल्य हैं तो अ द, और क ग, भुजा तुल्य होंगी अ उ, और क च भुजा समान होंगी फिर तीसरी द अ उ और ग क च, कोन भी तुल्य होंगे– उपपत्ति

जो अ द, क ग, के समान नहीं है तो एक दूसरे से बड़ा होगा तो कल्पना करो कि अ द, क ग, से बड़ा है तो अ द में से क ग, के समान द प, कोर लो और प उ

रेखा करदो अब देखो अ इ उ, और क ग च, त्रिभु
जों में इ प, और ग क, भुजा समान हैं इ उ, और ग च,
भुजा के तुल्य हैं अ इ उ,
और क ग च, कोने समान



हैं तो अ उ, और क च, आधार तुल्य होंगे अ इ उ,
और क ग च, त्रिभुज तुल्य होंगे इस लिये उनके
शेष कोने भी समान होंगे इस हेतुसे इ उ प, कोन
क च ग, कोन के समान होगा तो इ उ प, कोन इ उ अ,
कोन के तुल्य होगा पर यह बात असंभव है क्यों
कि राशिका एक खंड संपूर्ण राशिके समान हु
आ जाता है इस लिये अ इ, और क ग, तुल्य नहीं है
अर्थात् तुल्य हैं अ इ उ, और क ग च, त्रिभुजों के अ
इ, और क ग, भुजा हैं- इ उ, और ग च, भुज तुल्य
लिये हुए हैं और अ इ उ कोन क ग च, आधार तु
ल्य होंगे और इ अ उ, कोन ग क च, कोन के तुल्य हो
गा पहले वे भुजा तुल्य मानी है जो तुल्य कोनों का स्प
र्श करती हैं अब उन कोनों को तुल्य मानते हैं जो

तुल्य कोनों के सामने हैं वे पूर्वोक्त कोनों के तो तु
ल्य हैं और अ इ, और क ग, को तुल्य माना तो शेष
भुजा भी तुल्य होंगी अर्थात् अ उ, और क च, तुल्य
होंगी इ उ, और ग च, भुजा समान होंगी और इ अ उ,
कोन ग क च, कोन के तुल्य होगा - उपपत्ति
जो इ उ, और ग च, समान नहीं है तो इ उ, को ग च,
से बड़ा मानो और इ उ, में से इ ब ग च, के तुल्य का
टलो और अ ब, रेखा करदो अ इ ब, और क ग च, त्रि
भुजों में इ ब, और ग च, भुजा तुल्य हैं और अ इ, भुजा
क ग भुजा के तुल्य है और अ इ ब, कोन क ग च, को
न के तुल्य है इस लिये अ ब, और क च, आधार तुल्य
होंगे और अ इ ब, त्रिभुज क ग च, त्रिभुज के तुल्य
होगा तो शेष कोन शेष कोनों के तुल्य होंगे इस
कारण इ ब अ, कोन ग च क, कोन के तुल्य हैं परं
तु ग च क, कोन इ उ अ, कोन के तुल्य है इस कारण
इ ब अ, और इ उ अ, कोन तुल्य होंगे अर्थात् त्रिको
ण का बहिःकोण सम्मुख के अंतःकोण के समान

हुआ जाता है पर यह बात असंभव है इस लिये इ उ, और ग च, अतुल्य नहीं अर्थात वे तुल्य हैं अ इ उ, और क ग च, त्रिभुजों



में अ इ, और क ग, भुजा तुल्य हैं फिर इ उ, और ग च, समान हैं इस कारण अ उ, और क च, आधार भी तुल्य हैं और इ अ उ, कोन ग क च, कोन के समान है

२७ साध्य

जब दो सूधी रेखाओं पर तीसरी सूधी रेखा गिरने से एकांतर कोन समान हों तो वे दो रेखा आपस में समानांतर होंगी — दो सूधी रेखा अ इ, और उ क, हैं उन पर ग च, सूधी रेखा गिरने से अ ग च, और ग च क, एकांतर कोन तुल्य हों तो अ इ, और उ क, रेखा समानांतर होंगी —

उपपत्ति

जो अ इ, और उ क, रेखा समानांतर न होंगी तो वे इ क, वा अ उ, की ओर बढाने से मिल जायंगी कल्पना करो कि इ, और क, की ओर बढाने

रेखामें चौड़ाई नहीं होती केवल लंबाई होती है व्यवहार में जो ऐसी ———— लकीर को रेखा कहते हैं वह रेखा का आकार बताने के लिये है परंतु रेखाका शुद्ध स्वरूप दो बिंदुओंकी दूरी है जैसा क ग, रेखा कहने से क, और ग, बिंदु की दूरी जानो जैसा क ———— ग

३— रेखा के छोर बिंदु होते हैं

बालकों को इस बातका समझाना कठिन है परंतु वे लोग आगे कुछ पढेंगे तो इस बातका आशय समझेंगे

४—— सरल वा सूधी रेखा वह है जो दो बिंदुओंके बीच में सब से छोटी हो परंतु उसके सिरे पै वेही बिंदु हों

दो बिंदुओं के बीच में ऐसी कई रेखा खींच सकी हैं जिनके छोर वेही बिंदु हों कल्पना करो कि एक गिरह के अंतर से दो बिंदु क और ग हैं उन बिंदुओं के बीच में ऐसी कई रेखा करें जिनके छोर ये क और ग बिंदु हों इन सब रेखाओं को मापो तो सब से छोटी रेखा गिरह भरकी ही होगी जैसा उससे छोटी कोई

रेखा नहीं सकेगी इस का
रूप यही सूधी रेखा कहा
वेगी शेष छोटी होगी



५— धरातल वह है जिसमें केवल लंबाई चौड़ाई पाई जाय दर्पणोदर का जो ऊपर से पेटा दिखाई देता है वा हाथ फेरने से छूने में आता है वही धरातल है उसमें मुटाई नहीं होती उसमें मुटाई होने से पिंड हो जाता है

६— धरातल की सीमा रेखा होती है

इसका आशय समझने में भी वैसाही जानो जैसा दूसरी परिभाषा के लिये लिख आये हैं

७— समधरातल वा दर्पणोदर धरातल वह है जिसमें कहीं दो बिंदु लेकर उनके बीच में जो रेखा की जाय वह उस धरातल से बाहरी न हो

धरातल के किसी दो बिंदुओं के बीच रेखा करो और वह रेखा उसी धरातल पै रहे वा सूतका एक छोर एक बिंदु पर और दूसरा छोर तान कर दूसरे बिंदु पर रक्खो और सूतका पेटा भर धरातल को छूता रहे

तो उसे सम धरातल जानो

८— दर्पणोदर कोन दो रेखाओं के ऐसे झुकाव को कहते हैं कि वे रेखा मिल जाय पर मिलकर एक सूधी रेखा न हो जाय

दो रेखा अपनी सूध में बढ़ कर एक दूसरी से मिल जाय तो कोना उत्पन्न होता है जैसा (क ग) और (ग द) रेखा (ग) बिन्दु पर मिलती हैं तो (क ग द) कोण हुआ परंतु (अ इ) और (उ इ) वे दो रेखा (इ) बिन्दु पर मिल कर एक सूधी रेखा हो जाती हैं जैसा तो (अ इ उ) कोण नहीं समझा जायगा

९— सरल कोन वह है जो सूधी रेखाओं से सम धरातल पै उत्पन्न हो

कल्पना करो कि जैसे (क ग) और (ग द) दो सूधी रेखा सम धरातल में (ग) बिन्दु पर मिलीं तो (क ग द)

यह सरल कोन हुआ जैसा
और जो टेढ़ी रेखा हों जैसा (म ल) और (न ल)
रेखा हैं तो यह सरल
कोन नहीं कहावेगा

१० – एक सूधी रेखा दूसरी सूधी रेखा पर खड़ी की जाय और उस खड़ी रेखा के आस पास के दोनों कोन आपस में समान हों तो उनमें से प्रत्येक कोना समकोन होगा और खड़ी रेखा दूसरी रेखा पै लंब होगी और रेखा के उन आस पास के कोनों को आसन्न कोन कहते हैं

(ग द) आड़ी रेखा का सिरा छोड़ उस पर (क ल) एक सूधी खड़ी रेखा का योग करने से दो कोने उत्पन्न होते हैं जैसा क ल ग
और क ल द ये कोने किसी
प्रकार से तुल्य जाने जायं तो प्रत्येक कोना अर्थात (क ल ग) और क ल द कोना समकोन होगा और (ग द) रेखा पर (क ल) रेखा लंब होगी परंतु (ग द) सूधी

रेखा पर (क ल) सूधी रेखा
ऐसा खड़ी की जाय कि
जिस्से (क ल द) और (क ल ग) ये दोनों कोने आपस में तुल्य न हों तो वे सम कोन न होंगे और (क ल) रेखा लंब भी न होगी

११ – अधिक कोन वह कोन होता है जो सम कोन से बड़ा हो
कल्पना करो कि (क ल ग) सम
कोन है और (द ल ग) उस्से बड़ा
कोन इस लिये (द ल ग) अधिक कोन होगा

१२ – न्यून कोन वह है जो सम कोन से छोटा हो
कल्पना करो कि (क ल ग)
सम कोन है और (द ल ग)
उससे छोटा है तो (द ल ग)
न्यून कोन होगा

१३ – सब पदार्थों के छोरों को सीमा कहते हैं इस परिभाषा का आशय भी दूसरी और छठी परिभाषा की नाईं आगे जानो

१४– क्षेत्र वह है जो एक आदि रेखा से घिरा हो
(क ग त द) क्षेत्र एक रेखा से घिरा हुआ है और
(ल म न) तीन रेखाओं से और (अ आ इ उ) क्षेत्र चार
रेखाओं से घेरा गया है ऐसे और भी जानो



१५– दर्पणोदर वृत्तक्षेत्र उसे कहते हैं जो एक रेखा
अर्थात् परिधि से घिरा हो और उसके अं
तर्गत एक बिंदु से परिधि तक जितनी
रेखा खींची जाय वे तुल्य हों
जैसा (अ आ इ उ ओ औ) यह क्षेत्र एक रेखा अर्थात्
परिधि से घिरा है और इस
के बीच का जो (क) चिन्ह है उस
से परिधि तक (क अ क आ)



आदि जितनी रेखा खींची गई हैं वे तुल्य हों तो (अ आ
इ उ ओ औ) यह वृत्त क्षेत्र होगा यद्यपि (ग द त य)

क्षेत्र भी एक रेखा से घिरा हुआ है परंतु उसके अंत
र्गत य चिन्ह से निकल कर घेरने वाली रेखा तक
जितनी रेखा पहुंची हैं वे
तुल्य नहीं हैं इस कारण
(ग द त य) वृत्त क्षेत्र न होगा



१६– केंद्र वह बिंदु है जिससे परिधि तक जित
नी रेखा खींची जाय वे तुल्य हों
(अ इ उ ओ) वृत्त क्षेत्र में क बिंदु से परिधि तक जो
रेखा (क अ) (क इ) (क उ)
(क ओ) तुल्य हैं इस का
रण (क) बिंदु केंद्र होगा



१७– व्यास वह सीधी रेखा है जो केंद्र पै होकर गई हो
और उसके दोनों छोर परिधि को छूते हों व्यास के आधे
को व्यासार्ध वा त्रिज्या कहते हैं व्यास को छोड़ परिधि से प
रिधि तक जो सीधी रेखा गई हो उसे पूर्णज्या वा चाप कर्ण
भी कहते हैं (अ इ उ ओ) वृत्तक्षेत्र
का क केंद्र और (अ उ) सीधी रेखा है



वह केंद्र अर्थात् क बिंदु पै होकर गई है और उसके सिरे परिधि को छूते हैं इस लिये (अ उ) रेखा व्यास है और (अ क) वा (उ क) व्यासार्द्ध वा त्रिज्या हैं यद्यपि (म न) सूधी रेखा के सिरे भी परिधि को छूते हैं परंतु वह केंद्र पर होकर नहीं गई है इस लिये व्यास नहीं है उसे पूर्णज्या वा चापकर्ण कहते हैं

१८ – वृत्तार्ध वह क्षेत्र है जो व्यास और परिधि के उस भाग से घिरा हो जो व्यास के एक सिरे से दूसरे सिरे तक हो (अ इ उ) यह वृत्तार्द्ध क्षेत्र है जो परिधि के आधे भाग और व्यास से घिरा है



१९ – धनुष क्षेत्र उसे कहते हैं जो सूधी रेखा जिसे पूर्णज्या वा चापकर्ण कहते हैं उससे और परिधि के उस भाग से घेरा जाय जो पूर्णज्या के एक सिरे से दूसरे सिरे तक हो (इ ग त) और (ल म न) ये दोनों धनुष क्षेत्र हैं (इ ग त) क्षेत्र के भीतर (क)



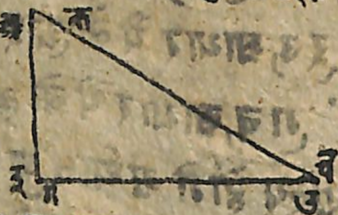
जब अ इ उ, और क ग च, त्रिभुजों की अ इ, और क ग, भुजा तुल्य हैं अ उ, और क च, भुजा समान हैं और अ उ, भुजों के बीच का अ, कोन क ग, और क च, भुजों के मध्य वाले क, कोन के तुल्य है तो इ उ, आधार पै के अ इ उ, कोन और अ इ उ, कोन ग च, आधार पै के क ग च, और क च ग, कोनों के तुल्य होंगे अर्थात् अ इ उ, कोन क ग च, कोन के तुल्य होगा अ इ उ, कोन क च ग, कोन के तुल्य होगा और इ उ, आधार ग च, आधार के समान होगा अ इ उ, त्रिभुज क ग च, त्रिभुज के तुल्य होगा

उपपत्ति

अ इ उ, त्रिभुज को क ग च, त्रिभुज पै ऐसी रीत से रक्खो कि अ इ, सरल भुजा क ग, सरल भुजा पै हो और अ उ, सरल भुजा क च, सरल भुजा पै हो तो अ, सरल कोन क, सरल कोन पर होगा और अ इ, भुजा का इ, चिन्ह क ग, भुजा के ग, चिन्ह पर

क रहेगा फिर (अइ) भुजा का (उ) चिन्ह (कच) भुजा के (च) चिन्ह पर पड़ेगा इसी कारण (इउ) सरल आधार (गच) सरल आधार पर स्थित होगा

इस प्रकार रखने से एक त्रिभुज दूसरे त्रिभुज को ढक लेगा



कोई कहे कि (इउ) आधार (गच) आधार पै न पड़ेगा जैसे नीचे लिखा है वैसे रहेगा

तो (इउ) और (गच) दो सरली रेखाओं से क्षेत्र बनने लगेगा

ख ।। और यह बात असंभव है

इस से यह बात जानी जाती है कि (उइ) आधार (गच) आधार में अवश्य रहेगा इस कारण (अइउ) त्रिभुज (कगच) त्रिभुज में भर बैठेगा। इस कारण (अइउ) त्रिभुज के (उइ) आधार पैके (इ) और (उ) कोन (कगच) त्रिभुज के (गच) आधार पैके (ग) और (च) कोन के तु

ल्य होंगे अर्थात् (अइउ) त्रिभुज (कगच) त्रिभुज के तुल्य होगा

५ साध्य

सम द्विबाहु त्रिभुज में आधार पैके दोनों कोने आपस में समान होंगे और उन तुल्य भुजाओं को अपनी सूध में बढ़ाने से आधार के नीचे जो दो कोने उत्पन्न हों वेभी आपस में समान होंगे

(अइउ) सम द्विबाहु त्रिभुज की (अइ) और (अउ) भुजा तुल्य हैं तो (इउ) आधार पैके (अइउ) और (अउइ) कोन आपस में तुल्य होंगे



फिर उसी सम द्विबाहु त्रिभुज की (अइ) भुजा को (क) तक और (अउ) भुजा को (ग) तक अपनी सूध में बढ़ा दो तो (इउ) आधार के नीचले (उइक) और (इउग) कोने भी आपस में समान होंगे



इ क, रेखा में कहीं न, चिह्न कर लिया और इ च,
सा० के तुल्य उ न, खंड उ ग, में से अलग कर लिया
फिर इ न, और उ च, रेखा करदी



उपपत्ति

अ इ न, और अ उ च, त्रिभुजों की अ इ, और अ
उ, भुजा तुल्य हैं क्योंकि वे समद्विबाहु त्रिभुज
क की भुजा हैं फिर इ च, और उ न, तुल्य हैं क्यों कि
इ च, के समान उ न, अलग किया था इस कारण
खे अ च, और अ न, भुजा तुल्य होगी इस प्रकार अ इ न,
और अ उ च, त्रिभुजों की दो २ भुजा तुल्य हैं और
अ, कोन उभय निष्ठ है इसी कारण अ इ न, त्रिभुज

कोन से छोटा होगा इसी रीत से इ उ, भुजा के तुल्य
दो खंड अ उ, भुजा प, चिन्ह
तक बढ़ाई जाय तो यह बात
सिद्ध हो सकी है कि इ उ प,
कोन से अ इ उ, कोन छोटा



सा० १५ है तो इ उ प, के तुल्य जो अ उ क, कोन है उससे भी
छोटा होगा

१७ साध्य

त्रिभुज के दो अंतः कोनों का योग दो समकोन से
छोटा होगा— कल्पना करो कि अ इ उ, त्रिभुज है
उसके चाहो जिन दो कोनों का योग करो वह योग
दो समकोन से छोटा होगा, इ उ रेखा को क, तक
बढ़ादो

उपपत्ति

अ उ क, बहिः कोन अ इ उ, कोन से बड़ा है उन दोनों
में अ उ इ, मिलाया तो अ उ क, और अ उ इ, इन दो
कोनों का योग अ इ उ, और अ उ इ, कोनों के योग से
बड़ा होगा परंतु अ उ क, और अ उ इ, कोनों का योग
दो सम कोन के तुल्य है इस लिये अ इ उ, और

अ उ इ, कोनों का योग दो सम कोन से छोटा होगा
इसी रीति से इ अ उ, और अ उ इ,
कोनों का योग भी सम कोन से
छोटा होगा इसी प्रकार इ अ उ,



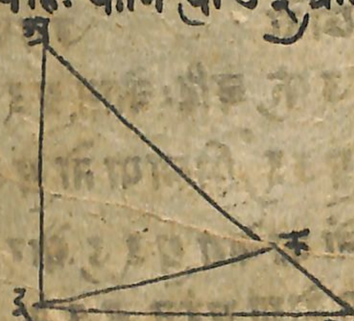
और अ इ उ, कोनों का योग दो समकोन से छोटा होगा

१८ साध्य

त्रिभुज में बडे भुज के साम्हने का कोन बडा होता
है अ इ उ, त्रिभुज में अ इ, भुजा से अ उ, भुजा बडी है
तो अ इ उ कोन अ उ इ, कोन से बडा होगा
अ उ, में से अ इ, के तुल्य अ क, काट लो और इ क,
रेखा करदो

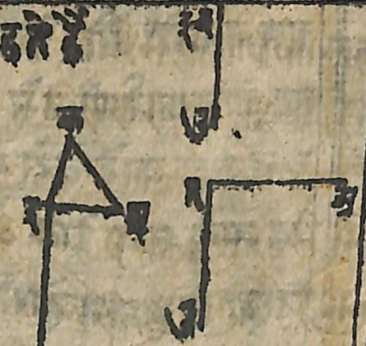
उपपत्ति

इ क उ, त्रिभुज का अ क इ, बहिः कोन क उ इ, अंतः
कोन से बडा है पर अ क,
और अ इ, भुजा समान हैं इ
स लिये अ क इ, और अ इ
क, कोन तुल्य है इस कारण



अ इ क, कोन अ उ इ, कोन से भी बडा है तो संपूर्ण

के तुल्य सूधी रेखा किया चाहते हैं



प्रथम, इ, से अ, तक सूधी
रेखा कर दो

अ इ, रेखा पर इ अ क,
सा १ सम त्रिबाहु त्रिभुज बना
ओ, इ, बिन्दु को केंद्र मान
इ उ, त्रिज्या से उ ग वृत्त
त बनाओ



क इ, रेखा को इ, की ओर
प्र १ अपनी सूध में बढाकर
उस इ की परिधि से लगा
दो और वही ग चिन्ह जानो



और क अ, रेखा को अपनी सूध इ, चिन्ह तक बढा
दो फिर क, चिन्ह को केंद्र मान, क ग, त्रिज्या से ग म

वृत्त बनाओ और ... [illegible]
रेखा जो भुजा ई थी उसे वह
वृत्त जहां काटे वहां म चिन्ह
जानो अम रेखा इउ
रेखा के समान होगी



उपपत्ति

प॰ १५ इ, चिन्ह से निकली हुई इग, और इउ, रेखा तुल्य हैं क्यों
कि ये दो रेखा ग व उ, वृत्त की त्रिज्या हैं
फिर क इ, और क म, तुल्य हैं क्यों कि वे क इ म, सम
त्रिबाहु त्रिभुज की भुजा हैं क ग, और क न, रेखा
तुल्य हैं कारण यह है कि दोनों रेखा ग न न, बड़े
वृत्त की त्रिज्या हैं फिर क ग, में से क इ, और क न,
में से क म, घटा दोगे तो इ ग, और म न, तुल्य ब
चेंगे इ ग, रेखा को इ उ, के तुल्य अभी साध चुके हैं
तो इ ग, रेखा इ उ, और म न, प्रत्येक रेखा के समान हैं
अर्थात इ ग, रेखा इ उ, रेखा के तुल्य है और म न,
रेखा के भी समान है इस कारण अ, चिन्ह से निकली

जो अ न, रेखा है वह इ उ, रेखा के तुल्य हुई

३ साध्य

दी हुई दो सूधी रेखाओं में एक छोटी और दूसरी बड़ी
है उन में से छोटी के तुल्य बड़ी में से एक खंड काटा चाहते
हैं कल्पना करो कि अ इ, बड़ी रेखा है और उ, छो
टी अ इ, रेखा में से उ, रेखा के
समान खंड काटा चाहते हैं तो
अ, चिन्ह से अ क, रेखा ऐसी
सा॰ २ बनाओ जो उ, रेखा के समान
हो अ, चिन्ह को केंद्र मान अ
क, त्रिज्या से क ग च, वृत्त बनाओ और उस वृत्त की परि
धि से अ इ, रेखा जहां कटे
वहां ग, जानो अ इ, रेखा का
अ ग, खंड उ, रेखा के तुल्य
होगा



उपपत्ति

अ ग, और अ क, रेखा तुल्य हैं क्यों कि ये दोनों रेखा क
ग च, वृत्त की त्रिज्या हैं अ क, और उ, रेखा तुल्य हैं क्यों

कि उ, रेखा के तुल्य अ क, रेखा बनाई है इस कारण अ क, रेखा अ ग, और र उ प्रत्येक रेखा के तुल्य हुई अर्थात् अ क, रेखा अ ग, के तुल्य हुई और र उ, रेखा के भी तुल्य हुई इस कारण अ ग, और र उ रेखा भी आपस में तुल्य हुई

४ साध्य

दिये हुए किसी एक त्रिभुज के दो भुज दूसरे त्रिभुज के दो भुजों के तुल्य हों और उन्हीं दोनों भुजों के बीच वाले कोने भी तुल्य हों तो एक त्रिभुज के आधार पै के शेष दो कोने दूसरे त्रिभुज के आधार पै के शेष दो कोनों के तुल्य होंगे अर्थात् वे कोण तुल्य होंगे जिनके सन्मुख की भुजा तुल्य होगी और उन दोनों त्रिभुजों के आधार भी तुल्य होंगे और दोनों त्रिभुज आपस में तुल्य होंगे कल्पना करो कि अ इ उ, और क ग च ये दो अलग भुज त्रिभुज हैं



अ इ उ, कोन अ उ इ, कोन से अवश्य बड़ा होगा

५ साध्य

त्रिभुज में बड़े कोन के सन्मुख का भुज बड़ा होगा अ इ उ, त्रिभुज में अ उ इ कोन से अ इ उ, कोन बड़ा है तो अ इ, भुजा से अ उ, भुजा बड़ी होगी

उपपत्ति

अ इ, भुजा से अ उ, भुजा को बड़ा न मानो तो तुल्य होगी वा छोटी होगी अ इ, और अ उ, को तुल्य कल्पना करोगे तो अ इ उ, कोने तुल्य होंगे परंतु यह असंभव है क्यों कि वे कोने तुल्य नहीं हैं छोटे बड़े कह दिये हैं इस कारण अ इ, और अ उ, तुल्य न होंगी

सा॰ ५ कदाचित् अ उ, भुजा को अ इ, भुजा से छोटा मानो तो अ उ इ, कोन से अ इ उ, कोन छोटा होगा परंतु यह अनुचित है क्यों कि जिस कोने को छोटा कल्पना किया वह बड़े कोने से भी बड़ा हुआ जाता है इस लिये अ उ, भुजा अ इ, भुजा से छोटी न होगी और

न वे दोनों भुजा समान होंगी तो अ उ, भुजा अ इ, भुजा से अवश्य बड़ी होगी- १७ साध्य

त्रिभुजकी दो भुजाओं का योग शेष तीसरी भुजासे बड़ा होगा अ इ उ, त्रिभुज है उसके किसी दो भुजाओं का योग तीसरे भुज से अधिक होगा अर्थात् अ इ, अ उ, का योग इ उ, से बड़ा होगा ऐसेही अ इ, इ उ, का योग अ उ, से बड़ा और इ उ, अ उ का योग अ इ, से बड़ा होगा अ इ, भुजा को बढ़ा कर उस में से अ उ, के तुल्य अ क, काट लो और क उ, रेखा करदे

अ १

उपपत्ति

अ क, और अ उ, समान हैं इस कारण अ क उ, और अ उ क, कोन समान होंगे परंतु इ उ क, कोन अ उ क, कोन से बड़ा है इस लिये इ उ क, कोन अ क उ कोन से भी बड़ा है अर्थात् इ क उ, कोन से भी बड़ा है परंतु त्रिभुज में बड़े कोन के सम्मुख की भुजा बड़ी होती है इस कारण इ क भुजा



सा १९